

第3章 確率微分方程式に対する離散変数法

確率的な不確実性を含む発展系を記述する確率微分方程式の離散変数法（数値解法）について解説する。

3.1 確率微分方程式概説

確率微分方程式 (stochastic differential equations) の一般形

$$\begin{cases} d\mathbf{X}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{X})dt + \mathbf{G}(t, \mathbf{X})d\mathbf{W}(t), & t \in [t_0, T], \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$\mathbf{X}(t) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ (d 次元ベクトル値関数)

$\mathbf{f}(t, \mathbf{X}) : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ドリフト項 (drift term)

$\mathbf{G}(t, \mathbf{X}) : [t_0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ 拡散項 (diffusion term) (分散行列)

$\mathbf{W}(t)$: 確率微分方程式に特徴的な m 次元 Wiener 過程 (Wiener process)

m 個の独立な1次元標準 Wiener 過程 $W^i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) を成分とするベクトル

$$\mathbf{W}(t) = (W^1(t), W^2(t), \dots, W^m(t))^T$$

説明を簡単にするため、まず1次元、しかも一つの標準 Wiener 過程のみをもつ確率微分方程式

$$\boxed{dX(t) = f(t, X)dt + g(t, X)dW(t), \quad t \in [t_0, T], \quad X(t_0) = X_0} \quad (3.2)$$

から出発する。

問題 (3.2) は確率初期値問題 (stochastic initial-value problem)

確率初期値問題 (3.2) の解 $X(t, \omega)$ は確率過程

確率過程 (stochastic process, random process) とは？

時間変数 t で添え字付けられた確率空間 (probability space) (Ω, \mathcal{A}, P) 上の確率変数 (random variable) の族

Ω : 標本空間 (sample space)

\mathcal{A} : σ 加法族 (σ algebra)

P : 確率測度 (probability measure)

確率過程では，時間 t を固定すれば $X(t, \cdot)$ が確率変数，標本点 ω を固定すれば $X(\cdot, \omega)$ が解の標本

解の標本を“軌道 (trajectory)”とも呼ぶ．

E : 標本空間 Ω 上での平均 (mean) 操作

例えば，確率変数 $X(\omega)$ の平均は $E(X(\omega))$ と記述．

さらに，特に断らない限り， ω を省略し， $X(t)$ ， $E(X)$ と表記することも多い．

確率論及び確率過程の詳細については

伊藤 清，“確率論”，岩波書店，初版 1953.

小倉 久直，“物理工学のための確率過程論”，コロナ社，1978.

3.1.1 Wiener 過程

確率微分方程式の定式化の基礎である Wiener 過程

Wiener 過程は，Nobert WIENER により Brown 運動（1828 年に植物学者 R. BROWN が発見した，植物の花粉中から出てくる微粒子が液体中を浮遊するときを示す不規則な運動）の数学的記述法として提案．

1 次元標準 Wiener 過程 $W(t)$ ($t \geq 0$)

$$(i) P(W(0) = 0) = 1,$$

$$(ii) E(W(t)) = 0 \quad \forall t \in [0, \infty),$$

$$(iii) E(W(t)W(s)) = \min(t, s)$$

の性質をもつ Gauss 過程（正規過程 (normal process)）

Wiener 過程の性質

$$\begin{aligned} E(W(t) - W(s)) &= 0, & E((W(t) - W(s))^2) &= t - s, & 0 \leq s \leq t \\ E(\{W(t_2) - W(t_1)\}\{W(t_4) - W(t_3)\}) &= 0, & t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Wiener 過程の性質と (3.3) により， $W(t) - W(s)$ ($0 \leq s \leq t$) は平均 0，分散 $t - s$ の正規分布 (normal distribution) $N(0; t - s)$ に従うので，Wiener 過程をコンピュータ上で模擬することが可能．

独立変数 t の区間 $[0, T]$ を，ステップ幅 $h = t_{k+1} - t_k = T/N$ で等間隔に分割

ステップ点: t_k ($k = 0, 1, \dots, N$)

Wiener 過程の増分 (increment) を $\Delta W_k = W(t_{k+1}) - W(t_k)$

Wiener 過程 $W(t_n)$ は

$$W(t_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta W_k, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.4)$$

と増分の単純な和

増分 ΔW_k は平均 0, 分散 h の正規分布 $N(0; h)$ に従う確率変数

この確率変数を模擬し, 加えてゆけば Wiener 過程が模擬できる.

平均 0, 分散 1 の標準正規分布 $N(0; 1)$ に従う乱数 (random numbers) (標準正規乱数) ξ_k により

$$\Delta W_k = \xi_k \sqrt{h}$$

正規乱数は一様乱数を変換して生成

変換法として, Box-Muller 法 (Box-Muller method) と極性 Marsaglia 法 (Polar Marsaglia method)

Wiener 過程の 1 本の標本 (軌道) を, コンピュータ上で模擬した結果が図 3.1

(i) コンピュータによる一様乱数発生法 (こうして得られた乱数は, しばしば擬似乱数 (pseudo random numbers) と呼ばれる) として, プログラム言語 C に付属のライブラリ関数 `drand48()` を使用

(ii) Box-Muller 法によって正規乱数に変換

(iii) `drand48()` の種 (seed) を 1

注意 3.1 図 3.1 のグラフは Wiener 過程の真の実現ではない. 図に示されたのは, ステップ点での Wiener 過程の近似値と, それらを直線で結んだ (線形補間した) グラフであり, 全体として Wiener 過程の一つの軌道の “近似” .

実現された軌道は

$$W_{(N)}(t, \omega) = W(t_k, \omega) + (W(t_{k+1}, \omega) - W(t_k, \omega)) \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k}, \quad t_k \leq t \leq t_{k+1} \quad (3.5)$$

ステップ幅 $h \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) のとき, $W_{(N)}(t, \omega)$ の極限が Wiener 過程の真の軌道 $W(t, \omega)$.

Wiener 過程は, もっとも簡単な確率微分方程式 $dX(t) = dW(t)$, $X(0) = 0$ の解とみなすことができるから, 上記 (3.4) は, 確率微分方程式のそれをも示唆 .

3.1.2 確率微分方程式と確率積分方程式

形式的に与えられた確率微分方程式の定義 (3.2) は妥当か?

微分可能性すら定かでない $X(t)$ に対する “微分” $dX(t)$ をどう考えるべきか?

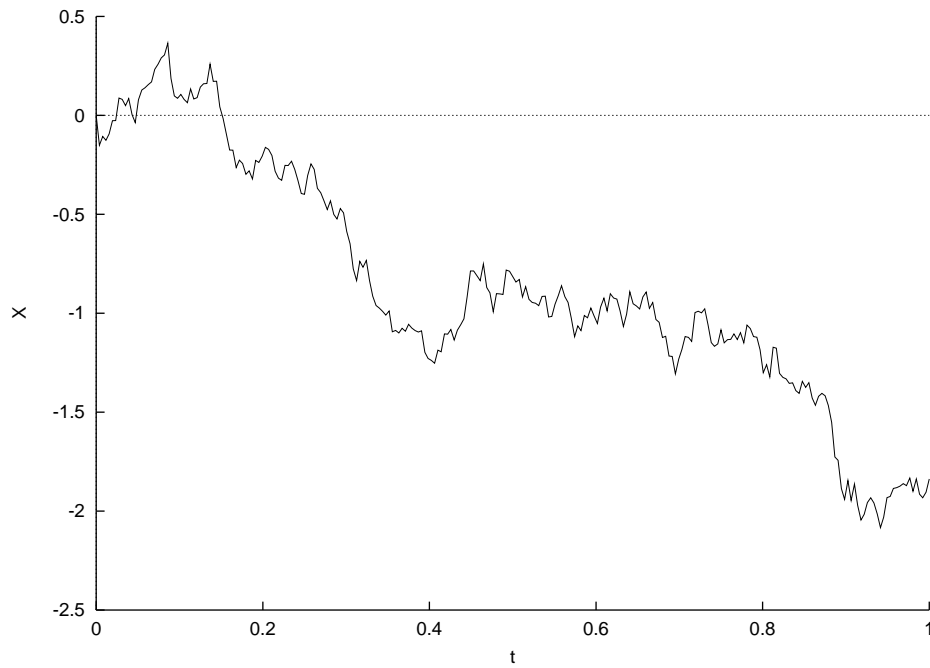


図 3.1: Wiener 過程の一軌道の計算例

確率積分方程式 (stochastic integral equations) を通じて正確に定義

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, X(s)) ds + \int_{t_0}^t g(s, X(s)) dW(s) \quad (3.6)$$

第 2 の積分 (確率積分 (stochastic integral)) の定義

$$\int_{t_0}^t g(s, X(s)) dW(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} g(t_k, \lambda X(t_{k+1}) + (1 - \lambda)X(t_k)) \Delta W_k \quad (3.7)$$

パラメータ λ は $0 \leq \lambda \leq 1$

離散点列 $\{t_k\}$ は

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} < \cdots < t_n = t$$

$\Delta W_k = W(t_{k+1}) - W(t_k)$, $h = \max(t_{k+1} - t_k)$

極限は 2 乗平均の意味

パラメータ λ を含むリーマン和の 2 乗平均極限を確率積分の定義

$\lambda = 0$ のとき, 確率積分 (3.7) は創始者である伊藤 清にちなみ伊藤型 (Itô-type) 確率積分

$\lambda = 1/2$ のとき Stratonovich 型 (Stratonovich-type) 確率積分

$\lambda = 0$, $\lambda = 1/2$ に対応して, 方程式 (3.2) はそれぞれ伊藤型の確率微分方程式, Stratonovich 型 (S 型) の確率微分方程式

対応する表記法

$$\int_{t_0}^t g(s, X(s)) dW(s)$$

は伊藤の確率積分，S 型の場合には

$$\int_{t_0}^t g(s, X(s)) \circ dW(s)$$

これらの確率積分に対応し，伊藤型および S 型確率微分方程式の表記

$$\begin{aligned} dX(t) &= f(t, X) dt + g(t, X) dW(t), \\ dX(t) &= \tilde{f}(t, X) dt + g(t, X) \circ dW(t) \end{aligned}$$

伊藤型と S 型の相違と相互関係

- 確率微分方程式の解は拡散過程 (diffusion process) となるが，伊藤型の確率積分は martingale の性質を保持．しかし，伊藤型の欠点はその解析が難しく，かなり計算が煩雑になること
- S 型では決定論的な微分則と同様の規則が成立し，解析がし易い利点があるが，確率解析で重要な役割をする martingale の性質を保持しない

S 型から伊藤型に変換する公式

確率積分における関係式

$$\int_a^b g(s, X(s)) \circ dW(s) = \int_a^b g(s, X(s)) dW(s) + \frac{1}{2} \int_a^b \left[\frac{\partial g}{\partial x} g \right] (s, X(s)) ds. \quad (3.8)$$

これを確率微分方程式の形式で述べれば，S 型確率微分方程式

$$dX = \tilde{f}(t, X) dt + g(t, X) \circ dW(t)$$

に対する解が，伊藤型確率微分方程式

$$dX = \left[\tilde{f} + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x} g \right] (t, X) dt + g(t, X) dW(t)$$

の解であることを意味し，逆に伊藤型確率微分方程式

$$dX = f(t, X) dt + g(t, X) dW(t)$$

の解は，S 型確率微分方程式

$$dX = \left[f - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x} g \right] (t, X) dt + g(t, X) \circ dW(t)$$

の解

注意 3.2 初期値が与えられれば常微分方程式の解軌道は一意に決まる（一意性の条件を満たしていることを仮定）．確率微分方程式の“解”は確率過程．すなわち，標本点を一つ固定すれば，時間軸方向に軌道が生成される．本章で述べる確率微分方程式の数値解法は，解の軌道の近似列を逐次生成する解法．

確率微分方程式の解の存在性と一意性を保証する定理

定理 3.1 次の三つの条件を仮定する

1. 函数 $f(t, x)$ と $g(t, x)$ は $(t, x) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}$ の連続函数である．
2. $t \in [t_0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}$ に対して，次式を満たす定数 K が存在する．
 - (a) $|f(t, x) - f(t, y)| + |g(t, x) - g(t, y)| \leq K|x - y|$.
 - (b) $|f(t, x)|^2 + |g(t, x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2)$.
3. 初期値 X_0 は $W(t) (t > 0)$ と独立，かつ $E((X_0)^2)$ は有限.

このとき，確率積分方程式 (3.6) の解 $X(t)$ が $[t_0, T]$ 上で存在し，確率 1 で連続，かつ $\sup_{[t_0, T]} E((X(t))^2)$ は有限である．さらに，解の軌道毎の一意性が成り立つ．すなわち，二つの解 $X = \{X(t), t \in [t_0, T]\}$ と $Y = \{Y(t), t \in [t_0, T]\}$ があるとき，

$$P \left(\sup_{[t_0, T]} |X(t) - Y(t)| = 0 \right) = 1$$

を満たす．■

伊藤の公式 (Itô formula) (伊藤の定理)

定理 3.2 実数値函数 $\phi(t, x)$ が $[t_0, T] \times \mathbb{R}$ 上で定義され，連続偏導函数

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = \phi_t, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) = \phi_x, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(t, x) = \phi_{xx}$$

をもち， $X(t)$ が確率微分

$$dX(t) = f(t)dt + g(t)dW(t)$$

をもつ $[t_0, T]$ 上で定義された確率過程であるとき， $Y(t) = \phi(t, X(t))$ は $[t_0, T]$ 上の確率過程で確率微分

$$dY(t) = [\phi_t + f\phi_x + \frac{1}{2}g^2\phi_{xx}](t, X(t)) dt + [g\phi_x](t, X(t)) dW(t) \quad (3.9)$$

をもつ．■

簡単のため，次の演算子

$$L_f = \frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}g^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad L_g = g \frac{\partial}{\partial x}$$

を導入すると, (3.9) 式は

$$dY(t) = [L_f\phi](t, X(t)) dt + [L_g\phi](t, X(t)) dW(t) \quad (3.10)$$

と表され, その等価な積分形は $t \in [t_0, T]$ に対して

$$Y(t) = Y(t_0) + \int_{t_0}^t [L_f\phi](s, X(s)) ds + \int_{t_0}^t [L_g\phi](s, X(s)) dW(s) \quad (3.11)$$

3.1.3 1次元確率微分方程式の例

例題 3.1 (確率 logistic 方程式) logistic 方程式

$$\frac{dx}{dt} = [\alpha - \beta x(t)]x(t) \quad (3.12)$$

は単一種個体群の個体数 x の変化を表す方程式

増加率 x'/x を x の減少函数 $\alpha - \beta x$ (α, β は正の定数) としたモデル.

個体数が 0 のときの増加率 α に (環境の変化などに起因する) 不規則な揺らぎの項を付加し, 確率微分方程式

$$dX(t) = X(\alpha - \beta X)dt + \sigma X dW(t) \quad (3.13)$$

$W(t)$ は 1次元 Wiener 過程, σ は正のパラメータ

パラメータ σ の値が大きくなるほど, 増加率の変動が激しく ■

図 3.2-3.6 は, $\alpha = 2, \beta = 1$ のとき $\sigma = 0.1, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ と変化させたとき, 解の様子がどのように変わるかを図示.

いずれも初期値を $X(0) = 1$ とした場合の軌道を, ステップ幅 $h = 10^{-4}$ の Euler・丸山スキーム (後述) によって計算した結果

定数 σ が大きくなるにつれて, 個体数の変動が激しくなり, やがては「絶滅」に到る様子が観察される.

方程式 (3.2) において拡散項 $g(t, x)$ が

(i) 拡散項が x に依存しない函数 $g(t)$ で与えられる場合, 加法的ノイズ (additive noise)

(ii) それ以外の場合を乗法的ノイズ (multiplicative noise)

加法的ノイズの確率微分方程式は, Langevin 方程式と呼ばれることがある

例題 3.2

$$dX = aXdt + bXdW(t) \quad (3.14)$$

a, b は定数. ■

方程式 (3.14) は線形であり, この解は幾何学的 Brown 運動 (geometric Brownian motion) とも呼ばれている.

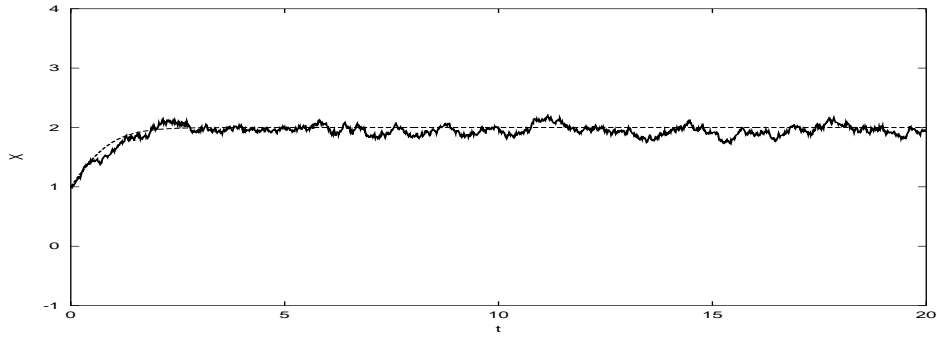


図 3.2: 確率 logistic 方程式の解 ($\sigma = 0.0, 0.1$)

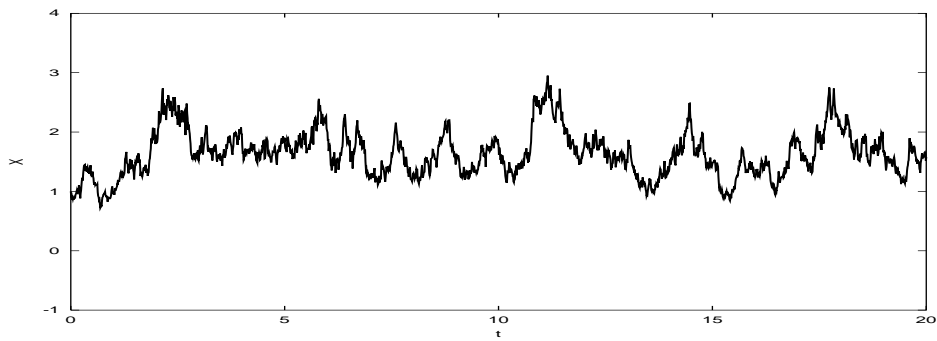


図 3.3: 確率 logistic 方程式の解 ($\sigma = 0.5$)

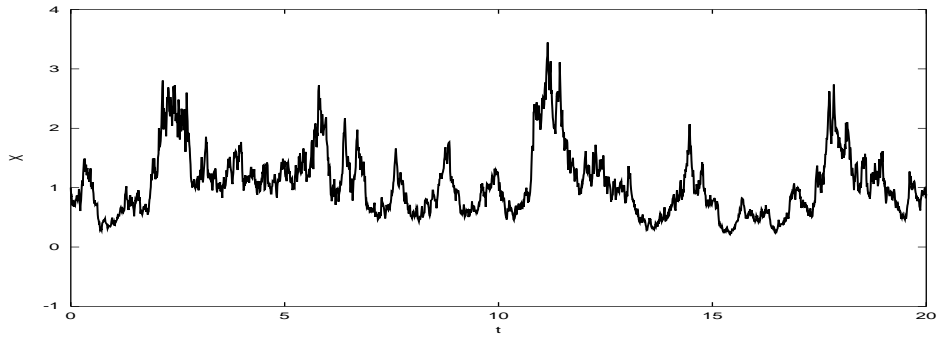


図 3.4: 確率 logistic 方程式の解 ($\sigma = 1.0$)

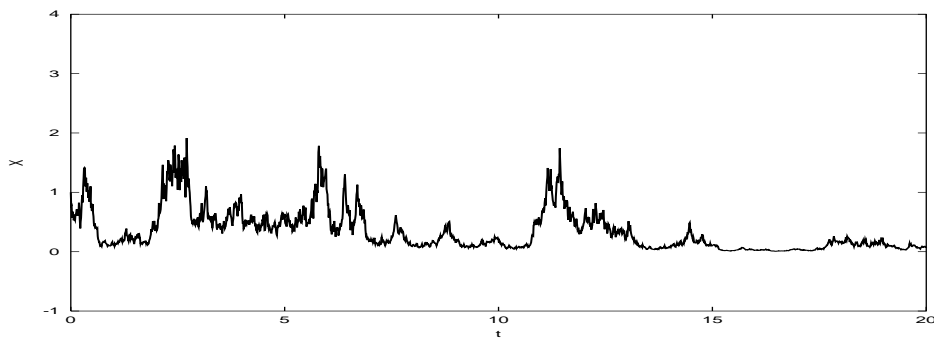


図 3.5: 確率 logistic 方程式の解 ($\sigma = 1.5$)

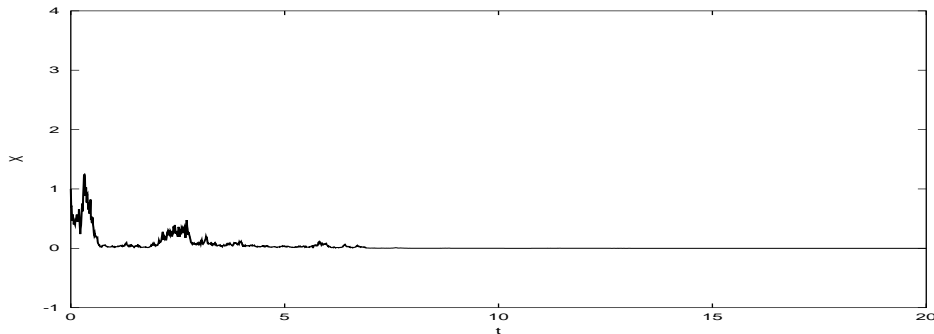


図 3.6: 確率 logistic 方程式の解 ($\sigma = 2.0$)

1次元の場合，線形な方程式は陽的に解を表現することができる（解析解という）．初期値 $X(t_0) = X_0$ に対して方程式 (3.14) の解析解は

$$X(t) = X_0 \exp \left(\left(a - \frac{1}{2}b^2 \right) (t - t_0) + b(W(t) - W(t_0)) \right) \quad (3.15)$$

幾何学的ブラウン運動の例は線形であり，解析解がわかる．一般に解析解が求まる場合は希少で，何らかの数値的手法を使用して解くほか，解の定量的情報を得る手段はない．常微分方程式の数値解法として例えば Runge-Kutta 法があるように，確率微分方程式に対して数値解法がいくつか提案されている．

3.2 離散変数解法の基礎

最も基本的な離散変数解法は，Euler・丸山スキーム (Euler-Maruyama scheme, EM scheme)

Gisiro Maruyama, Continuous Markov processes and stochastic equations, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), 4 (1955), 48–90

3.2.1 EM スキーム

確率初期値問題 (3.2) に対し, 3.1.2 において確率積分を定義した Riemann 和 (3.7) で, $\lambda = 0$ の場合を用いるのが EM スキーム

$\{t_n\}$ ($t_n = t_0 + nh$, $T = t_N$): 等間隔 h の離散点列
小区間 $[t_n, t_{n+1}]$ の左端点での函数値によって, \bar{X}_n から \bar{X}_{n+1} を

$$\boxed{\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + f(t_n, \bar{X}_n)h + g(t_n, \bar{X}_n)\Delta W_n} \quad (3.16)$$

と生成.

$h = t_{n+1} - t_n$: 時間方向の増分

拡散項 $g(t, x)$ が 0 ならば, EM スキーム (3.16) は Euler 法に他ならない.

本質的に確率初期値問題の場合には, 拡散項に対しても Euler 法の原理を適用

小区間の左端点での拡散値と, Wiener 過程の増分の積で近似

基本的に Wiener 過程のコンピュータによる近似生成 (3.1.1 節) を確率初期値問題に拡張したのが EM スキーム

例題 3.3 (EM スキームによる計算例) 幾何学的 Brown 運動 (3.2) において, $a = 1$, $b = 1$ にとった場合

$$\begin{cases} dX(t) = X dt + X dW(t), & t \in [0, 1.0], \\ X(0) = 1.0 \end{cases} \quad (3.17)$$

に EM スキームを適用. 式 (3.15) より解析解は

$$X(t) = \exp\left(\frac{1}{2}t + W(t)\right) \quad (3.18)$$

ステップ幅 $h = 2^{-3}$ の EM スキームにより $T = 1$ まで計算, 結果は図 3.7 ■

3.2.2 数値解の収束性

強い近似 (strong approximation) または 軌道近似 (pathwise approximation): 解の軌道を近似

弱い近似 (weak approximation): 解の平均や分散などの統計量を近似

定義 3.1 離散近似過程 \bar{X}_n が強い収束次数 α をもつとは, ある正のステップ幅の限界 h_0 が存在して, それ以下の任意の正のステップ幅 h に対して, 次式を満たす有限な定数 K が存在することである.

$$e(h) = \mathbf{E}(|X(T) - \bar{X}_N|) \leq Kh^\alpha \quad (3.19)$$

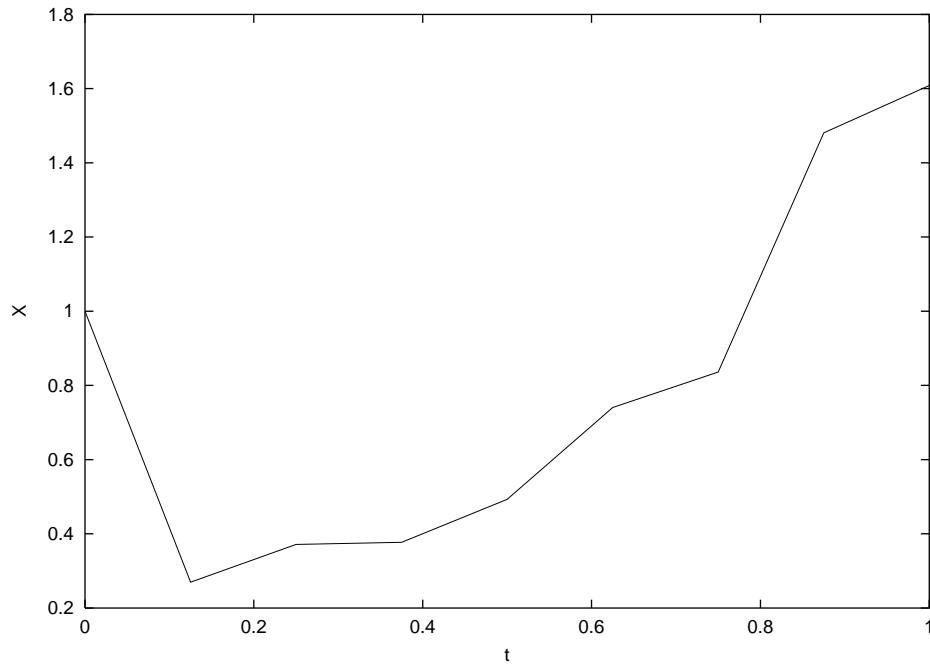


図 3.7: EM スキーム (強い近似)

$e(h)$: 近似解の大域誤差

定義 3.2 離散近似過程 \bar{X}_n が弱い収束次数 β をもつとは, ある正のステップ幅の限界 h_0 が存在して, それ以下の任意の正のステップ幅 h と, 任意の多項式 φ に対して, 次式を満たす有限な定数 K が存在することである.

$$|\mathbf{E}(\varphi(X(T))) - \mathbf{E}(\varphi(\bar{X}_N))| \leq Kh^\beta \quad (3.20)$$

3.2.3 強い近似のスキーム

強い近似は解の軌道の近似列を生成する近似解法

その出発点は EM スキームであるが, 確率微分方程式に対しても高次の数値スキームを追求伊藤の公式の積分形 (3.11) (3.1.2 節) を応用した, 確率微分方程式の解の伊藤 - Taylor 展開が強い近似の基礎

確率微分方程式 (3.2) の解の積分形式

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, X(s))ds + \int_{t_0}^t g(s, X(s))dW(s) \quad (3.21)$$

被積分函数 $f(s, X), g(s, X)$ が十分に連続微分可能と仮定

(3.21) の $f(s, X(s))$ と $g(s, X(s))$ に着目し, 公式 (3.11) を各々適用すると

$$f(s, X(s)) = f(t_0, X(t_0)) + \int_{t_0}^s [L_f f](r, X(r)) dr + \int_{t_0}^s [L_g f](r, X(r)) dW(r),$$

$$g(s, X(s)) = g(t_0, X(t_0)) + \int_{t_0}^s [L_f g](r, X(r)) dr + \int_{t_0}^s [L_g g](r, X(r)) dW(r)$$

この2式を (3.21) に代入

$$X(t) = X(t_0) + f(t_0, X(t_0)) \int_{t_0}^t ds + g(t_0, X(t_0)) \int_{t_0}^t dW(s)$$

$$+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s [L_f f](r, X(r)) dr ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s [L_g f](r, X(r)) dW(r) ds \quad (3.22)$$

$$+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s [L_f g](r, X(r)) dr dW(s) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s [L_g g](r, X(r)) dW(r) dW(s)$$

上式の第2行, 第3行を剰余項 R_1 とみなして, これを除外した値を $X(t)$ の近似値 $\bar{X}(t)$

$$\bar{X}(t) = X(t_0) + f(X(t_0)) \int_{t_0}^t ds + g(X(t_0)) \int_{t_0}^t dW(s)$$

t を $t_1 = t_0 + h$ で置き換え, 整理

$$\bar{X}(t_1) = X(t_0) + f(X(t_0))h + g(X(t_0))\{W(t_1) - W(t_0)\}$$

$\{W(t_1) - W(t_0)\}$ を ΔW_0 と置けば, これはEM スキームに他ならない.

剰余項 R_1 を評価すると

$$\mathbf{E}(|R_1|^2) = \mathcal{O}(h^2)$$

同じ近似スキームを $t_0 + h, t_0 + 2h, \dots, t_0 + Nh$ まで繰り返し適用したときの大域的な評価は

$$\mathbf{E}(|X(T) - \bar{X}_N|) \leq Kh^{\frac{1}{2}} \quad (3.23)$$

これはEM スキームの強い収束次数が $1/2$ であることを意味.

伊藤 - Taylor 展開をさらに繰り返し適用し, 高次のスキームを導出

EM スキームでは, 式 (3.22) で留めていた展開を, 被積分函数 $L_g g$ に対しさらに適用すると

$$L_g g(s, X(s)) = L_g g(t_0, X(t_0)) + \int_{t_0}^s [L_f L_g g](r, X(r)) dr + \int_{t_0}^s [L_g L_g g](r, X(r)) dW(r)$$

これを (3.22) に代入し整理

$$X(t) = X(t_0) + f(t_0, X(t_0)) \int_{t_0}^t ds + g(t_0, X(t_0)) \int_{t_0}^t dW(s)$$

$$+ [L_g g](t_0, X(t_0)) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW(r) dW(s) + R_2 \quad (3.24)$$

剰余項 R_2 は

$$\begin{aligned}
 R_2 = & \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s [L_f f](r, X(r)) dr ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s [L_g f](r, X(r)) dW(r) ds \\
 & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s [L_f g](r, X(r)) dr dW(s) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^r [L_f L_g g](z, X(z)) dz dW(r) dW(s) \\
 & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^r [L_g L_g g](z, X(z)) dW(z) dW(r) dW(s)
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

剰余項 R_2 は

$$E(|R_2|^2) = \mathcal{O}(h^3)$$

式 (3.24) より導出される数値スキームは EM スキームより収束次数が高いことが期待できる . EM スキームに次項

$$[L_g g](t_0, X(t_0)) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dW(r) dW(s) \tag{3.26}$$

の乱数による実現形が付加

式 (3.26) を計算すると

$$\left[\frac{\partial g}{\partial x} g \right] (t_0, X(t_0)) \frac{(W(t) - W(t_0))^2 - (t - t_0)}{2} \tag{3.27}$$

となるので , 具体的スキーム (提案者 G.N. MILSTEIN にちなみ Milstein スキーム) は

$$\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + f(t_n, \bar{X}_n)h + g(t_n, \bar{X}_n)\Delta W_n + \left[\frac{\partial g}{\partial x} g \right] (t_n, \bar{X}_n) \frac{(\Delta W_n)^2 - h}{2} \tag{3.28}$$

数値解の大域誤差の評価

$$E(|X(T) - \bar{X}_N|) \leq Kh \tag{3.29}$$

Milstein スキームは強い収束次数 1 .

大域誤差 $e(h)$ の推定 線形テスト方程式 (3.17) を題材にして , EM スキームと Milstein スキームについて

線形テスト方程式 (3.17) の解析解

$$X(t) = \exp \left(\frac{1}{2}t + W(t) \right) \tag{3.30}$$

この解形式に , Wiener 過程 $W(t)$ のコンピュータの実現値を代入すれば , 一つの軌道が生成できる .

h	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}
EM	1.17×10^0	5.18×10^{-1}	3.67×10^{-1}
Milstein	4.77×10^{-1}	1.44×10^{-1}	6.86×10^{-2}

表 3.1: 強い近似解の比較

3.1.1 節で記したように, 式 (3.30) における $W(t)$ を近似 Wiener 過程 $W_{(N)}(t)$ に置き換えた

$$X_{(N)}(t) = \exp\left(\frac{1}{2}t + W_{(N)}(t)\right) \quad (3.31)$$

をコンピュータ上で実現される数値解, あるいは実現解 (realized exact solution) という.
不等式

$$E(|X(T) - Y_N|) \leq \sqrt{E((X(T) - Y_N)^2)}$$

が成り立つので, 2 乗平均誤差の平方根を指標.

2 乗平均誤差は, 次のように誤差の算術平均により推定.

$$\text{error}^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (X_{(N)}^i(t) - \bar{X}_N^i)^2 \quad (3.32)$$

$X_{(N)}^i(t), \bar{X}_N^i$: 実現解及び数値解の第 i 軌道

表 3.1: ステップ幅 $h = 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}$, $T = 1$ における 2 乗平均誤差を, EM スキームと Milstein スキームに対して計算

Milstein スキームが EM スキームより大域誤差が小.

図 3.8: 横軸に $\log_2 h$, 縦軸に $\log_2(\text{error})$ として大域誤差の推移を図示

最小 2 乗法で直線近似すると, 誤差の推移の傾きは EM スキームが 0.42, Milstein スキームが 0.70

3.2.4 弱い近似

弱い近似の導出法は強い近似と同じであるが, どこまで伊藤 - Taylor 展開の項を繰り入れるか, その基準が異なるだけ.

定義 3.2 に従うと, EM スキーム

$$\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + f(t_n, \bar{X}_n)h + g(t_n, \bar{X}_n)\Delta W_n$$

は弱い収束次数が 1.

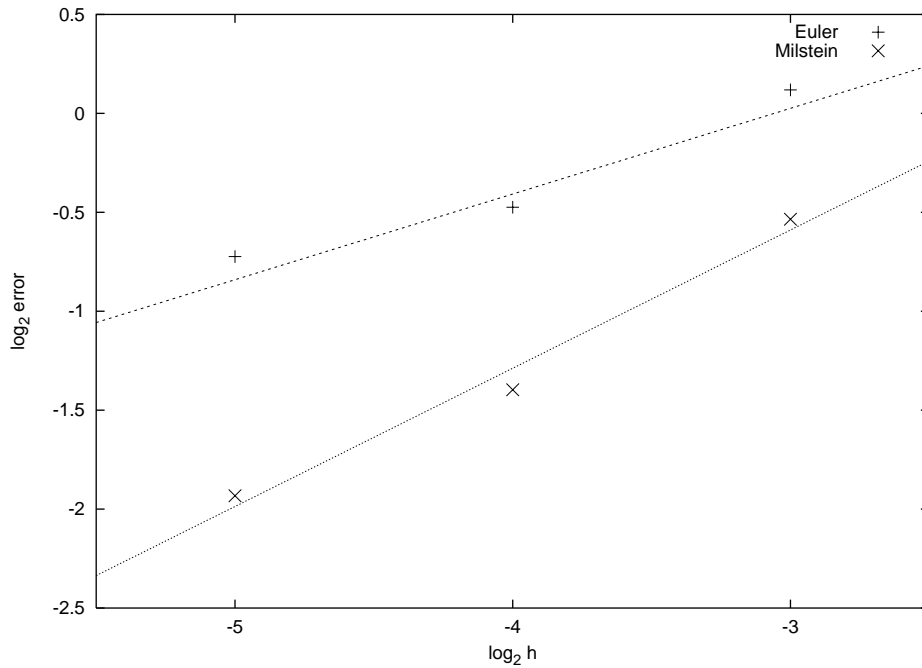


図 3.8: 強い近似解の比較

伊藤 - Taylor 展開を次のように近似した，弱い収束次数 2 の Taylor スキーム

$$\begin{aligned}
\bar{X}_{n+1} = & \bar{X}_n + f(t_n, \bar{X}_n)h + g(t_n, \bar{X}_n)\Delta W_n + \left[\frac{\partial g}{\partial x} g \right] (t_n, \bar{X}_n) \frac{(\Delta W_n)^2 - h}{2} \\
& + \left[\frac{\partial f}{\partial x} g \right] (t_n, \bar{X}_n) \Delta Z_n + \left[\frac{\partial f}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} g^2 \right] (t_n, \bar{X}_n) \frac{h^2}{2} \\
& + \left[\frac{\partial g}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} g^2 \right] (t_n, \bar{X}_n) \{ \Delta W_n h - \Delta Z_n \}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

確率的増分 ΔZ_n は次の確率二重積分

$$\Delta Z_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^s dW(r) ds \tag{3.34}$$

を表わす Gauss 型の確率変数．すでに導入した ΔW_n と次のような相互関係にある．

$$\mathbf{E}(\Delta W_n) = \mathbf{E}(\Delta Z_n) = 0, \quad \mathbf{E}((\Delta W_n)^2) = h, \quad \mathbf{E}((\Delta Z_n)^2) = \frac{h^3}{3}, \quad \mathbf{E}(\Delta W_n \Delta Z_n) = \frac{h^2}{2} \tag{3.35}$$

Wiener 過程の増分 ΔW_n を，一つの標準正規乱数 ξ_n を用いて $\Delta W_n = \xi_n \sqrt{h}$ として実現するとき，性質 (3.35) を満たすようにして， ΔZ_n を実現するには， ξ_n と独立な別の標準正規乱数 $\tilde{\xi}_n$ をも使って

$$\Delta Z_n = \frac{1}{2} h^{\frac{3}{2}} \left(\xi_n + \frac{1}{\sqrt{3}} \tilde{\xi}_n \right) \tag{3.36}$$

とすればよいことが知られている。

弱い近似による解の推定

弱い近似は，相当数の軌道を生成して，平均や分散など所要の次数までのモーメントを近似．数理統計学により，少量標本で被近似量を区間推定することが可能．解の平均値を区間推定してみる．

時刻 $t = t_n$ における解の平均値 μ は

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{X}_{n,k}$$

N : 発生させた軌道の数

$\bar{X}_{n,k}$: $t = t_n$ における k 番目の軌道に対する近似解

μ の区間推定のために， M 個の独立な独立な標本（無作為な標本）を生成
 M 個の独立な標本（群 (batch) という）の第 j 群の平均値の標本 μ_j は

$$\mu_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{X}_{n,k,j}, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

標本平均 $\hat{\mu}$ と不偏分散 $\hat{\sigma}^2$ は

$$\hat{\mu} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mu_j, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M (\mu_j - \hat{\mu})^2$$

自由度 $M-1$ の Student の t 分布を使って，信頼度 $100(1-\alpha)\%$ の解の平均 μ の信頼区間は

$$\left(\hat{\mu} - t_{1-\alpha, M-1} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{M}}, \quad \hat{\mu} + t_{1-\alpha, M-1} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{M}} \right)$$

$t_{1-\alpha, M-1}$ の値は数表を引く．

例題 3.4 (弱い近似解のシミュレーション例) 強い近似であげたのと同じ確率初期値問題

$$\begin{cases} dX(t) = X dt + X dW(t), & t \in [0, 1.0], \\ X(0) = 1.0 \end{cases} \quad (3.37)$$

に弱い近似を適用し，平均値の推定．

解の平均値の関数は $E(X(t)) = e^t$ ．

数値スキームのステップ幅 $h = 2^{-3}$ ， $T = 1$ まで計算．

標本を作る群の数 $M = 20$ ，軌道の数 $N = 100$ ．信頼度 90% とすると $t_{0.9, 19} = 1.73$ ．

EM スキームの結果は図 3.9，Taylor スキームの結果は図 3.10．真の平均値は実線，各スキームによる推定値の上限と下限及び平均は誤差棒．

この図より，EM スキームより，2 次の Taylor スキームの方が勝っている．■

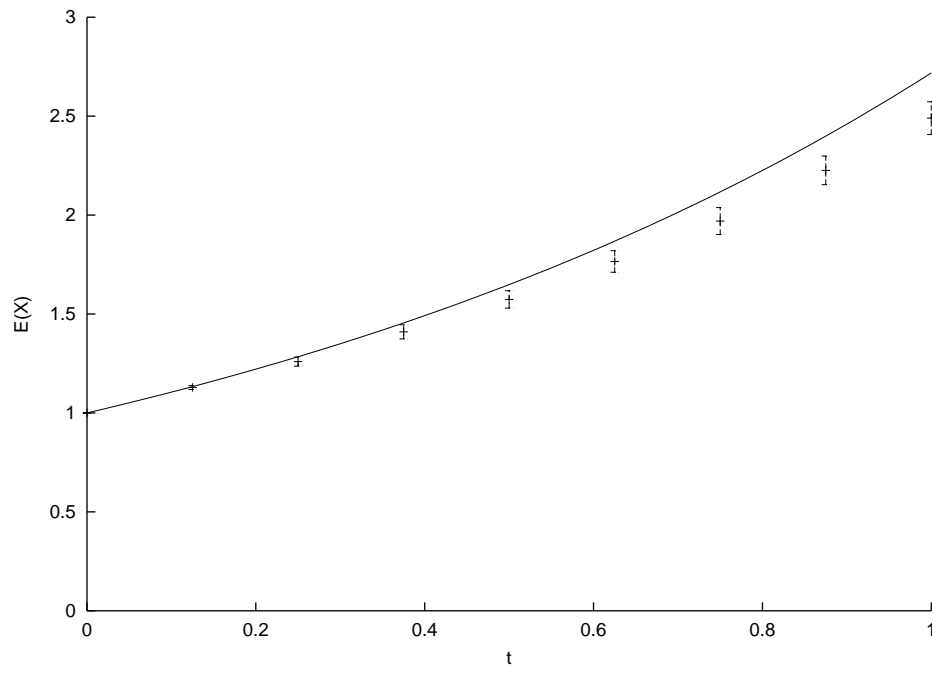


図 3.9: EM スキーム (弱い近似)

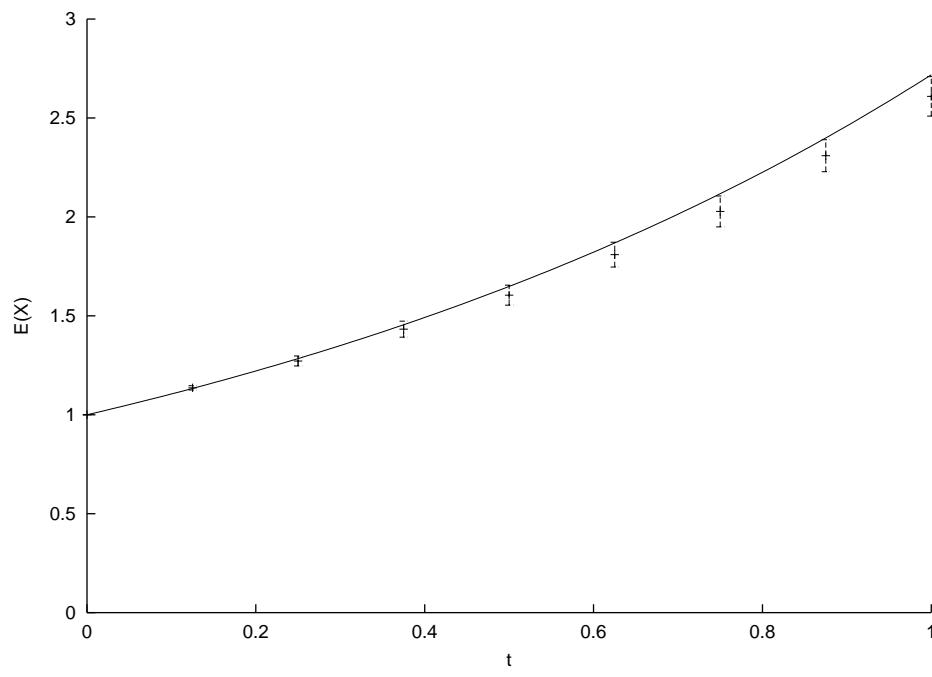


図 3.10: テイラー・スキーム (弱い近似)

簡易スキーム

弱い近似としての EM スキームでは，Wiener 過程の増分 ΔW_n を本来の正規乱数によるのではなく，次の性質を満たす近似正規乱数 $\Delta \hat{W}_n$ で代用しても，収束次数 1 を達成できる．

$$E(\Delta \hat{W}_n) = E((\Delta \hat{W}_n)^3) = 0, \quad E((\Delta \hat{W}_n)^2) = h. \quad (3.38)$$

この性質を満たす方法として，例えば 2 点分布確率変数 (two-point distributed random variable)

$$P(\Delta \hat{W}_n = \pm\sqrt{h}) = \frac{1}{2} \quad (3.39)$$

や

$$\Delta \hat{W}_n = \sqrt{12h}(U_n - 1/2) \quad (3.40)$$

U_n は $[0, 1)$ に分布する一様乱数．近似正規乱数を用いたスキームを簡易スキーム (simplified scheme) といい

$$\boxed{\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + f(t_n, \bar{X}_n)h + g(t_n, \bar{X}_n)\Delta \hat{W}_n} \quad (3.41)$$

と表現．

この考えは 2 次の Taylor スキーム (3.33) にも適用でき

$$\begin{aligned} \bar{X}_{n+1} &= \bar{X}_n + f(t_n, \bar{X}_n)h + g(t_n, \bar{X}_n)\Delta \hat{W}_n + \left[\frac{\partial g}{\partial x} g \right] (t_n, \bar{X}_n) \frac{(\Delta \hat{W}_n)^2 - h}{2} \\ &+ \left[\frac{\partial f}{\partial x} g \right] (t_n, \bar{X}_n) \frac{h\Delta \hat{W}_n}{2} + \left[\frac{\partial f}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} g^2 \right] (t_n, \bar{X}_n) \frac{h^2}{2} \\ &+ \left[\frac{\partial g}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} g^2 \right] (t_n, \bar{X}_n) \frac{h\Delta \hat{W}_n}{2} \end{aligned} \quad (3.42)$$

近似正規乱数 $\Delta \hat{W}_n$ が，次の性質をみたせば収束次数 2 を保持．

$$E(\Delta \hat{W}_n) = E((\Delta \hat{W}_n)^3) = E((\Delta \hat{W}_n)^5) = 0, \quad E((\Delta \hat{W}_n)^2) = h, \quad E((\Delta \hat{W}_n)^4) = 3h^2. \quad (3.43)$$

そのような確率変数 $\Delta \hat{W}_n$ の実現方法として，3 点分布確率変数 (three-point distributed random variable)

$$P(\Delta \hat{W}_n = \pm\sqrt{3h}) = \frac{1}{6}, \quad P(\Delta \hat{W}_n = 0) = \frac{2}{3} \quad (3.44)$$

3.3 残された課題

1. 確率微分方程式の連立系に対する離散変数解法 (強い近似，弱い近似)
2. より高次の離散変数解法の追求，SDEs 独自の困難さ
3. 離散変数解法に対する安定性概念と解析
4. 独立性の優れた，大量の擬似乱数の発生機構が求められる