

2 円周率の計算をめぐる

数値アルゴリズム (numerical algorithm) の発展の典型例として, 円周率 π の計算法の歴史と, その計算手段 (計算機) との関わりを見よう.

2.1 はじめに

円周率 = (円周の長さ) \div (円の直径) が一定であることの発見

円周率 ratio of the circumference to its diameter, number π , Ludolph's number

- 幾何学に
- 解析学に ... \sin, \cos あるいは $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$ etc.
- 物理学に
- 工業・技術に

$\pi = 3.1415926535 \dots$

参考図書

小林 昭七: 円の数学, 裳華房, 1999

金田 康正: (かなだ やすまさ) π のはなし, 東京図書, 1991

野崎 昭弘: π の話, 岩波書店, 1974

ベックマン, P.: (田尾・清水訳) π の歴史, 蒼樹書房, 1973

ドゥラエ, J.-P.: (畑 訳) π 魅惑の数, 朝倉書店, 2001

J. Arndt, Ch. Haenel: π - Unleashed, Springer, Berlin - Heidelberg, 2001

2.2 最初の方法 — 内接・外接正多角形

幾何学的算術的方法 古代ギリシア: 数学 mathematics の始まり

半径 1 の円の内接正六角形の一辺の長さ a , 外接正六角形のそれを b .

$b =$ 垂線長 1 の正三角形の一辺の長さ

ピタゴラス PYTHAGORAS (572 - 492 B.C.) の定理より $b = 2/\sqrt{3}$

結局 $3 < \pi < 3\frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} = 3.4641 \dots$

内接・外接正 12 角形を考えることによって, 上の数値はより精しくなるだろう.

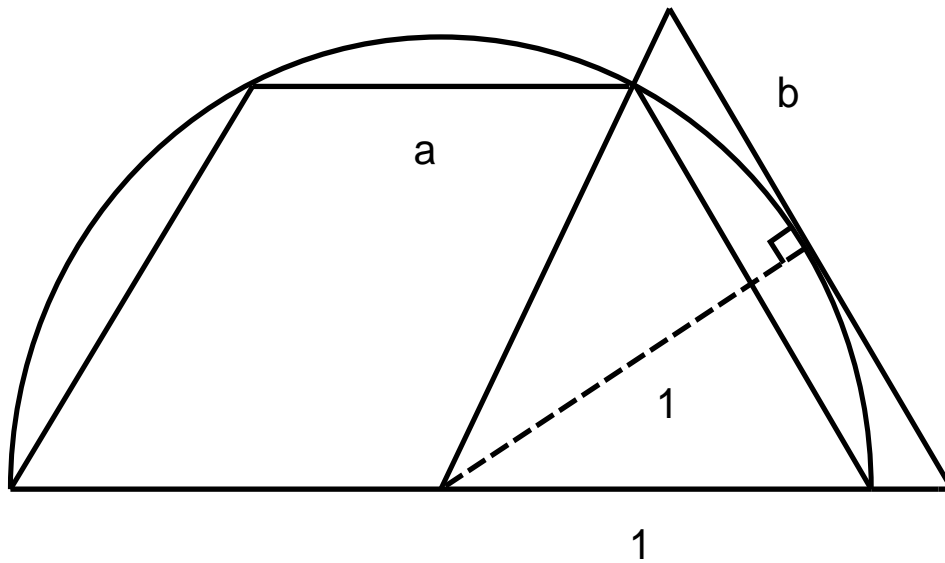


図 2.1. half hexagon

2.2.1 正 n 角形と正 $2n$ 角形 — 漸化式

中心 O , 半径 1 の円の $1/n$ の弧: LMN ; $\triangle LON$: 内接正 n 角形の $1/n$
 内接正 n 角形の辺長 $= \overline{LN} = 2a$; $\triangle LOT$: 外接正 n 角形の $1/(2n)$
 外接正 n 角形の辺長の $1/2 = \overline{LT} = b$; $\triangle LOM$: 内接正 $2n$ 角形の $1/(2n)$;
 内接正 $2n$ 角形の辺長 $= \overline{LM} = 2a'$; $\triangle POQ$: 外接正 $2n$ 角形の $1/(2n)$
 外接正 $2n$ 角形の辺長 $= \overline{PQ} = 2b'$;

幾何学的条件を量的条件へ
 内接・外接正 n 角形より

- OT は $\angle LON$ の二等分線
- LT は円の接線

ゆえに $\triangle LTH \sim \triangle OTL$ で, $\overline{LH} : \overline{LT} = \overline{OL} : \overline{OT}$.

一方ピタゴラスの定理より, $\overline{OT}^2 = 1 + b^2$

まとめると

$$a = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \quad (2.1)$$

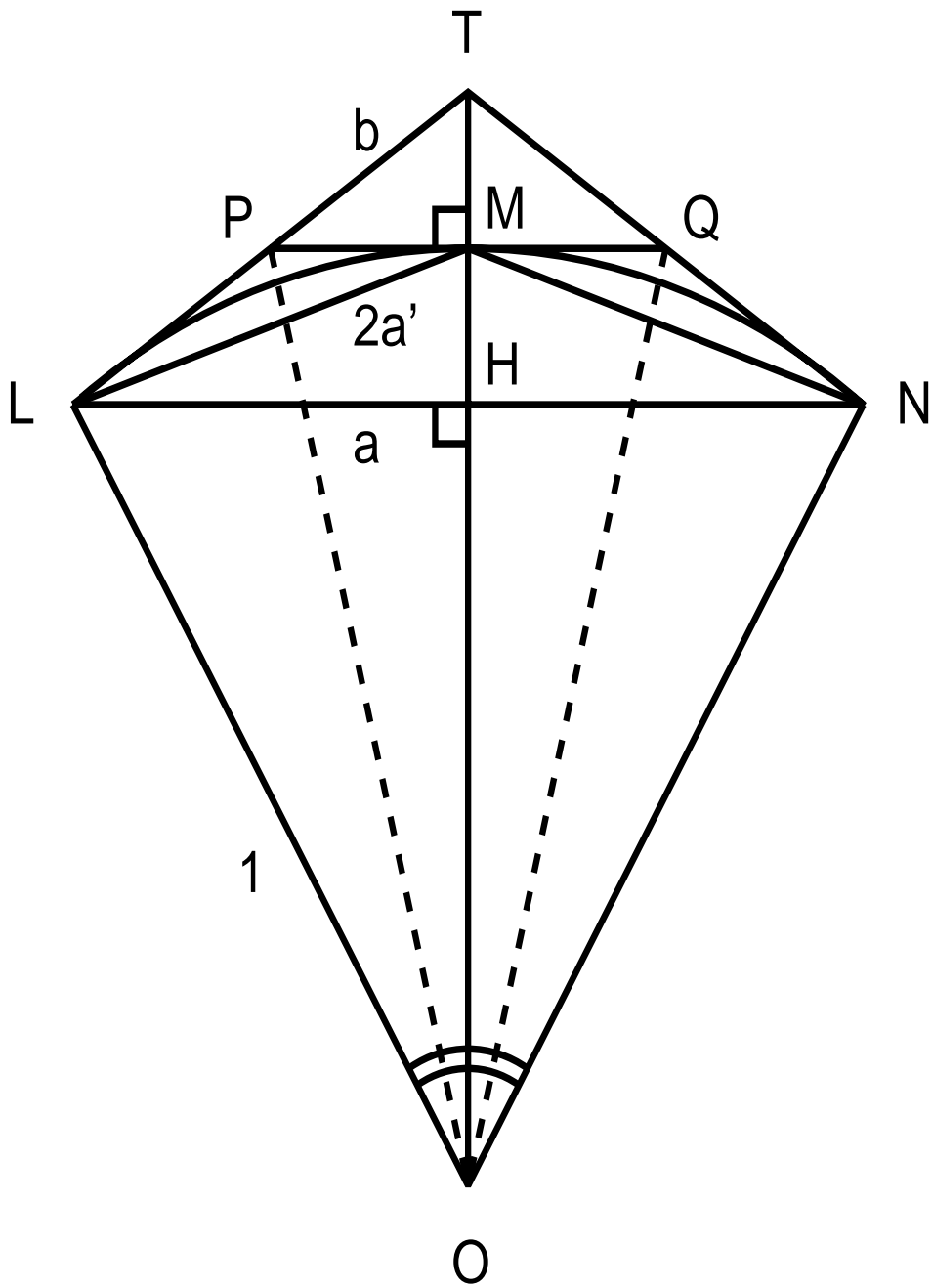
同様のことが内接・外接正 $2n$ 角形についてもなりたち

$$a' = \frac{b'}{\sqrt{1+b'^2}} \quad (2.2)$$

n から $2n$ へ関係

$\triangle TPM \sim \triangle TLH$ より

$$bb' = a(b - b') \quad (2.3)$$



☒ 2.2. n -polygons

式 (2.1) と (2.3) より a を消去すると

$$b' = \frac{b}{1 + \sqrt{1 + b^2}} \quad (2.4)$$

以上より

内接正 n 角形の周長 $= 2A$, 外接正 n 角形の周長 $= 2B$, 内接正 $2n$ 角形の周長 $= 2A'$, 外接正 $2n$ 角形の周長 $= 2B'$

とおけば

$$\begin{cases} A = na = \frac{nb}{\sqrt{1 + b^2}}, & B = nb, \\ A' = 2na' = \frac{2nb'}{\sqrt{1 + b^2}}, & B' = 2nb' = \frac{2nb}{1 + \sqrt{1 + b^2}} \end{cases} \quad (2.5)$$

$C = \sqrt{1 + b^2}, C' = \sqrt{1 + b'^2}$ とおけば

$$\begin{cases} A = B/C, \\ B' = \frac{2B}{1 + C}, & \left(\frac{1}{B'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{A} \right) \right), \\ A' = B'/C' \end{cases} \quad (2.6)$$

が導かれた。

アルゴリズムへ

正方形 ($n = 4$) から初めて (初期条件), 半径 1 の円に内接・外接する正 2^{m+1} 角形 ($m = 1, 2, \dots$) の周長をそれぞれ $2l_m, 2L_m$ とおく ($2l_m$ が上の $2A$ に, $2L_m$ が $2B$ にあたる) ことにすると

$$L_1 = 4, \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} l_n = L_n / \sqrt{1 + (L_n / 2^{n+1})^2}, \\ L_{n+1} = 2 / (1/l_n + 1/L_n), \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.8)$$

という漸化式 (recurrence formula) がえられる。

$$\underbrace{L_1, l_1}_{\text{正方形}} \quad \underbrace{L_2, l_2}_{\text{正 8 角形}} \quad \underbrace{L_3, l_3}_{\text{正 16 角形}} \quad \dots$$

と無限に続く数列の極限值を求めれば, π の値が分かるだろう。

アルゴリズムの解析: 無限数列だから

- 極限值が存在するか? (収束するか?)
- 極限值はなにか?
- どの位の速さで極限值に近づくか? (収束の速さ)

を調べなければならない。

2.2.2 数列の性質

順次以下のことを示して，収束性と極限値をいう．

- (1) $0 < l_n < \pi < L_n$ (幾何学より)
- (2) $l_n < l_{n+1} < L_{n+1} < L_n$ $\{l_n\}$ は単調増加， $\{L_n\}$ は単調減少数列
- (3) $2\sqrt{2} = l_1 < l_2 < \dots < l_n < l_{n+1} < \dots < L_{n+1} < L_n < \dots < L_2 < L_1 = 4$
- (4) $\exists l = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n, \exists L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n$ (“有界単調数列には極限値が存在する”)
- (5) 調和平均の漸化関係より，両辺の極限をとって $l = L = \pi$

2.2.3 収束の速さ

式 (2.8) 後半より

$$\frac{L_n}{L_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{L_n}{l_n} + 1 \right)$$

ゆえに

$$\frac{L_n}{L_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{L_n}{2^{n+1}} \right)^2} \right) \approx 1 + \frac{1}{16} \frac{\pi^2}{2^{2n}} + O(2^{-4n}) \quad (n \gg 1)$$

上の評価は

$$L_n - \pi = O(2^{-2n}) = O(4^{-n}) \quad (n \text{ が十分大}) \quad (2.9)$$

の意味． $\log_{10} 4 = 0.6020\dots$ だから， n をひとつ増やすごとに， L_n は π の正確な値に 10 進 0.6 桁程度ずつ近づく．

ファン・クーレン Ludolph VAN CEULEN(1540 - 1610, オランダ) の仕事.

2.2.4 計算してみよう

半径 1 の円に内接・外接する正 2^{m+1} 角形 ($m = 1, 2, \dots$) の周長を計算する方法で， π の近似値をコンピュータで計算してみる．

正 2^{n+1} 角形法による π の計算

n	ln	Ln
1	2.8284271247461898	4.0000000000000000
2	3.0614674589207183	3.3137084989847607
3	3.1214451522580524	3.1825978780745281

4	3.1365484905459398	3.1517249074292564
5	3.1403311569547534	3.1441183852459047
6	3.1412772509327738	3.1422236299424577
7	3.1415138011443018	3.1417503691689670
8	3.1415729403670922	3.1416320807031823
9	3.1415877252771605	3.1416025102568095
10	3.1415914215112006	3.1415951177495898
11	3.1415923455701189	3.1415932696293085
12	3.1415925765848738	3.1415928075996455
13	3.1415926343385641	3.1415926920922557
14	3.1415926487769870	3.1415926632154094
15	3.1415926523865925	3.1415926559961980
16	3.1415926532889937	3.1415926541913954
17	3.1415926535145942	3.1415926537401946
18	3.1415926535709939	3.1415926536273941
19	3.1415926535850938	3.1415926535991940
20	3.1415926535886194	3.1415926535921441
21	3.1415926535895009	3.1415926535903820
22	3.1415926535897212	3.1415926535899414
23	3.1415926535897762	3.1415926535898313
24	3.1415926535897900	3.1415926535898033
25	3.1415926535897931	3.1415926535897967
26	3.1415926535897940	3.1415926535897949
27	3.1415926535897949	3.1415926535897949
28	3.1415926535897949	3.1415926535897949
29	3.1415926535897949	3.1415926535897949
30	3.1415926535897949	3.1415926535897949

2.2.5 数 π の性質

π の値の本質は何か．有限回の四則演算の手続き（代数的アルゴリズム）で表現できるのか．

実数 real numbers \mathbb{R} の階層性

整数 integers \mathbb{Z}

有理数 rational numbers \mathbb{Q}

代数的数 algebraic numbers

超越数 transcendental numbers

J.H. LAMBERT (1728 - 77, 独): π が無理数であることを証明 (1761)

C.L.F. LINDEMANN (1852 - 1939, 独): π が超越数であることを証明 (1882)

有限と無限の相違

2.3 解析的方法

微積分法の創始によって π の計算にも新展開

要点 三角函数 $\tan x$ $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \tan \frac{\pi}{4} = 1$ etc.

解析函数の Taylor 級数展開 (Maclaurin 展開)

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots$$

2.3.1 Gregory-Leibniz の方法

J. GREGORY (1638 - 1675, 英), G.W.F. LEIBNIZ (1646 - 1716, 独)

$\tan x$ の逆函数 $\arctan x$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} \iff \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

これを使うと

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots, \quad (|x| < 1)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \dots$$

すなわち $\arctan x$ の Maclaurin 展開. $x = 1$ に適用すれば

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots \quad (2.10)$$

これは π の無限級数表現

しかし収束はきわめて緩慢 (収束するが交項級数)

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(4m+1)(4m+2)},$$

$$\frac{\pi}{4} - \sum_{m=0}^M \frac{1}{(4m+1)(4m+2)} = O\left(\frac{1}{(4M+3)(4M+4)}\right) = O\left(\frac{1}{16M^2}\right)$$

たとえば $M = 10$ ならば $(16M^2)^{-1} \approx 6.2 \times 10^{-4}$. これは幾何学的算術的方法と比べても圧倒的に遅い .

理由 : $1/(1+x^2)$ の Maclaurin 展開の収束半径に注目

2.3.2 Sharp の方法

公式 $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ を利用 .

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} + \dots \right)$$

$1/\sqrt{3}$ あるいは $\sqrt{3}$ の値が必要だが , Gregory–Leibniz の方法より速い (SHARP , 1699)

2.3.3 加速法

2.2.1 節の正 n 角形・正 $2n$ 角形において

$$\angle LON = \frac{2\pi}{n}, \angle LOH = \frac{\pi}{n}, \overline{LH} = \sin \frac{\pi}{n}, \overline{LT} = \tan \frac{\pi}{n}$$

ゆえに , 内接正 2^{n+1} 角形の周長 $2l_n$ (外接正 2^{n+1} 角形の周長 $2L_n$) に対しては

$$l_n = 2^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}, \quad L_n = 2^{n+1} \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} \quad (2.11)$$

\sin, \tan の Maclaurin 展開

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots, \quad (|x| < \infty)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots \quad (|x| < \frac{\pi}{2})$$

を式 (2.11) に代入して , $N = 2^{n+1}$ とおくと

$$l_n = \pi \left(1 - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{N} \right)^2 + \frac{1}{120} \left(\frac{\pi}{N} \right)^4 - \dots \right), \quad L_n = \pi \left(1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{N} \right)^2 + \frac{2}{15} \left(\frac{\pi}{N} \right)^4 + \dots \right)$$

そこで

$$\frac{1}{3}(2l_n + L_n) = \pi \left(1 + \frac{1}{20} \left(\frac{\pi}{N} \right)^4 + \dots \right)$$

が成り立つ . $(\pi/N)^2$ の項が消えてしまったことに注目 .

数列 $\{l_n\}, \{L_n\}$ よりも数列 $\{\frac{1}{3}(2l_n + L_n)\}$ のほうが , ずっと早く π に収束する .

さらに

$$l_{n+1} = \pi \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6 \cdot 2^{2(n+1)}} + \frac{1}{160} \cdot \frac{\pi^4}{120 \cdot 2^{4(n+1)}} - \dots \right)$$

なので

$$l_n^{(1)} \equiv \frac{1}{3}(4l_{n+1} - l_n) = \frac{1}{3}(l_{n+1} - l_n) + l_{n+1} = \pi \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^4}{120 \cdot 2^{4(n+1)}} + \dots \right)$$

同様に

$$L_n^{(1)} \equiv \frac{1}{3}(4L_{n+1} - L_n) = \frac{1}{3}(L_{n+1} - L_n) + L_{n+1} = \pi \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{2\pi^4}{15 \cdot 2^{4(n+1)}} + \dots \right)$$

となって，2次のべきを全部消すことができる．

この過程を繰り返せば，4次，6次と次々に消すことができる．

収束級数の外挿（補外）extrapolation による加速というアルゴリズム

建部 賢弘（たけべ たかひろ，1664 - 1739, 関 孝和の高弟）

²¹⁰ 角形（ $n = 9$ ）までの計算から，このような加速法によって π の値を 41 桁正しく求めた（コンピュータはない，算盤と紙上の筆算のみ．）

正 2^{n+1} 角形法による π の計算の加速

n	ln	Ln	accelerated
1	2.8284271247461898	4.0000000000000000	3.2189514164974597
2	3.0614674589207183	3.3137084989847607	3.1455478056087323
3	3.1214451522580524	3.1825978780745281	3.1418293941968778
4	3.1365484905459398	3.1517249074292564	3.1416072961737118
5	3.1403311569547534	3.1441183852459047	3.1415935663851369
6	3.1412772509327738	3.1422236299424577	3.1415927106026680
7	3.1415138011443018	3.1417503691689670	3.1415926571525237
8	3.1415729403670922	3.1416320807031823	3.1415926538124559
9	3.1415877252771605	3.1416025102568095	3.1415926536037104
10	3.1415914215112006	3.1415951177495898	3.1415926535906635
11	3.1415923455701189	3.1415932696293085	3.1415926535898486
12	3.1415925765848738	3.1415928075996455	3.1415926535897980
13	3.1415926343385641	3.1415926920922557	3.1415926535897944
14	3.1415926487769870	3.1415926632154094	3.1415926535897944
15	3.1415926523865925	3.1415926559961980	3.1415926535897944
16	3.1415926532889937	3.1415926541913954	3.1415926535897944
17	3.1415926535145942	3.1415926537401946	3.1415926535897944
18	3.1415926535709939	3.1415926536273941	3.1415926535897944
19	3.1415926535850938	3.1415926535991940	3.1415926535897936

20	3.1415926535886194	3.1415926535921441	3.1415926535897944
21	3.1415926535895009	3.1415926535903820	3.1415926535897944
22	3.1415926535897212	3.1415926535899414	3.1415926535897944
23	3.1415926535897762	3.1415926535898313	3.1415926535897944
24	3.1415926535897900	3.1415926535898033	3.1415926535897944
25	3.1415926535897931	3.1415926535897967	3.1415926535897944
26	3.1415926535897940	3.1415926535897949	3.1415926535897944
27	3.1415926535897949	3.1415926535897949	3.1415926535897949
28	3.1415926535897949	3.1415926535897949	3.1415926535897949
29	3.1415926535897949	3.1415926535897949	3.1415926535897949
30	3.1415926535897949	3.1415926535897949	3.1415926535897949

2.3.4 Euler–Machin の方法

L. EULER (1707 – 1783, スイス → 露)

key idea

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}$$

$a = \tan A$, $b = \tan B$ とおけば

$$A - B = \arctan\left(\frac{a - b}{1 + ab}\right) \quad (2.12)$$

EULER の例 (1748)

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \quad (2.13)$$

もっと前に, John MACHIN が与えた例 (1706)

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \quad (2.14)$$

実は

$$4 \arctan \frac{1}{5} = A \quad \text{ならば} \quad \tan A = \frac{120}{119}$$

が成り立つ. 式 (2.14) を用いた Machin の公式 (しばしば arctan 公式という)

$$\frac{\pi}{4} = 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots \right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} + \dots \right)$$

収束の速さ $O(5^{-2n})$

コンピュータ時代の初期まで用いられた有名なアルゴリズム.

収束級数による π の計算

n	Gregory-Leibniz	Sharp	Machin
0	4.0000000000000000	3.4641016151377548	3.1832635983263602
1	2.6666666666666670	3.0792014356780042	3.1405970293260603
2	3.4666666666666668	3.1561814715699543	3.1416210293250346
3	2.8952380952380956	3.1378528915956805	3.1415917721821773
4	3.3396825396825403	3.1426047456630850	3.1415926824043994
5	2.9760461760461765	3.1413087854628836	3.1415926526153086
6	3.2837384837384844	3.1416743126988380	3.1415926536235550
7	3.0170718170718178	3.1415687159417844	3.1415926535886025
8	3.2523659347188767	3.1415997738115062	3.1415926535898362
9	3.0418396189294032	3.1415905109380806	3.1415926535897922
10	3.2323158094055939	3.1415933045030822	3.1415926535897940
11	3.0584027659273332	3.1415924542876468	3.1415926535897940
12	3.2184027659273333	3.1415927150203804	3.1415926535897940
13	3.0702546177791854	3.1415926345473144	3.1415926535897940
14	3.2081856522619439	3.1415926595217143	3.1415926535897940
15	3.0791533941974278	3.1415926517339980	3.1415926535897940
16	3.2003655154095489	3.1415926541725758	3.1415926535897940
17	3.0860798011238346	3.1415926534061658	3.1415926535897940
18	3.1941879092319425	3.1415926536478267	3.1415926535897940
19	3.0916238066678399	3.1415926535714038	3.1415926535897940
20	3.1891847822775961	3.1415926535956356	3.1415926535897940
21	3.0961615264636424	3.1415926535879342	3.1415926535897940
22	3.1850504153525314	3.1415926535903873	3.1415926535897940
23	3.0999440323738079	3.1415926535896044	3.1415926535897940
24	3.1815766854350325	3.1415926535898548	3.1415926535897940
25	3.1031453128860127	3.1415926535897745	3.1415926535897940
26	3.1786170109992202	3.1415926535898002	3.1415926535897940
27	3.1058897382719475	3.1415926535897918	3.1415926535897940
28	3.1760651768684385	3.1415926535897944	3.1415926535897940
29	3.1082685666989471	3.1415926535897936	3.1415926535897940
30	3.1738423371907505	3.1415926535897940	3.1415926535897940

2.4 急収束数列法 — 現代的方法

ここまでの方法の収束の速さは

Gregory-Leibniz $O(n^{-2})$ (n のべき乗のオーダー)

正多角形法・Machin $O(c^{-an})$ ($c > 1$)

これでは限界．もっと高速な方法なしには，たとえスーパーコンピュータによっても π の値の長大桁計算はできない (スーパーコンピュータの活用には新しいアルゴリズムが必要.)

E. SALAMIN と R.P. BRENT が独立に新しい方法を発見 (1976)

1. 算術幾何平均の反復
2. 楕円積分の Landen 変換 (Landen transformation)
3. 楕円積分の Legendre 関係式 (Legendre formulae)

円周率計算の現在の世界記録は，金田・高橋による

206, 158, 430, 000 桁 (1999 年 10 月)

である (ftp://pi.super-computing.org/README.our_latest_record による.)

アルゴリズム (Pascal プログラム風記述)

出発値 $A_0 = 1, B_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, T_0 = \frac{1}{4}, X_0 = 1$

$n := 0$

```
while abs( $A_n - B_n$ ) >  $\varepsilon$  do
  begin  $A_{n+1} := (A_n + B_n)/2$ ;
         $B_{n+1} := \sqrt{A_n B_n}$ ;
         $T_{n+1} := T_n - X_n(A_n - A_{n+1})^2$ ;
         $X_{n+1} := 2X_n$ ;
         $n := n + 1$ ;
  end;
 $\pi := (A_{n+1} + B_{n+1})^2 / (4T_{n+1})$ 
```

このアルゴリズムがなぜ π を与えるか？

2.4.1 算術幾何平均 agm

算術幾何平均 arithmetic-geometric mean (agm)

a_0, b_0, c_0 : 正の実数 (出発値), $a_0^2 = b_0^2 + c_0^2$

数列を

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}), \quad b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \quad (c_n^2 = a_n^2 - b_n^2) \quad (2.15)$$

とすると

$$\exists \lim a_n = \lim b_n \equiv \text{agm}(a_0, b_0)$$

またも無限数列なので，収束性の証明が必要．

1. まず $a_n > b_n$
2. $b_{n-1} < a_n < a_{n-1}$
3. $b_{n-1} < b_n$
4. ゆえに $b_{n-1} < b_n < a_n < a_{n-1}$
5. $\{a_n\}$ は単調減少, $\{b_n\}$ は単調増加の数列で, とともに有界.
6. 極限 $\bar{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\bar{b} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ が存在.
7. 式 $2a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ の両辺で極限をとり, $\bar{a} = \bar{b}$

agm への収束は急速

$$c_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} - b_{n-1}) \text{ とおくと}$$

$$0 < \cdots < c_{n+1} < c_n < \cdots < c_2 < c_1$$

と単調減少列で, さらに $c_n^2 = 4a_{n+1}c_{n+1}$ だから

$$c_{n+1} = \frac{c_n^2}{4a_{n+1}} = \frac{1}{4a_{n+1}} \left(\frac{c_{n-1}^2}{4a_n} \right)^2 = \cdots = \frac{c_1^{2(n+2)}}{(2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^8 \cdots 2^{2(n+1)})(a_{n+1} \cdot a_n \cdots a_1)}$$

なので, $c_1 < 1$ なら非常に早く 0 に収束すると期待できる.

2.4.2 算術幾何平均と円周率 π

第一種および第二種楕円積分

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}}, \quad J(a, b) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt$$

に対して上の agm 数列が, 次のような等式 (楕円積分の Landen 変換)

$$I(a_n, b_n) = I(a_{n+1}, b_{n+1}), \quad J(a_n, b_n) = 2J(a_{n+1}, b_{n+1}) - a_n b_n I(a_{n+1}, b_{n+1})$$

をみたすので

$$\text{agm}(a_0, b_0) \cdot I(a_0, b_0) = \frac{\pi}{2}, \quad J(a_0, b_0) = \left(a_0^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} 2^j c_j^2 \right) I(a_0, b_0) \quad (2.16)$$

さらに楕円積分の Legendre 関係式: $(b/a)^2 + (b'/a')^2 = 1$ ならば

$$a^2 I(a, b) J(a', b') + a'^2 I(a', b') J(a, b) - a^2 a'^2 I(a, b) I(a', b') = \frac{\pi}{2} a a' \quad (2.17)$$

において, $a_0 = a'_0 = 1, b_0 = k, b'_0 = k' \quad (k^2 + k'^2 = 1)$ とおき, (2.16), (2.17) を使って

$$\boxed{\pi = \frac{4 \text{agm}(1, k) \text{agm}(1, k')}{1 - \sum_{j=1}^{\infty} 2^j (c_j^2 + c_j'^2)}}$$

特に $k = k' = 1/\sqrt{2}$ とするとき

$$\pi = \frac{4 (\operatorname{agm}(1, 1/\sqrt{2}))^2}{1 - \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j+1} c_j^2}$$

検算のために, k, k' にほかの組み合わせが可能なところが特徴.

2.4.3 誤差評価

$0 < k, k' < 1, \quad k^2 + k'^2 = 1$ と仮定.

$a_0 = 1, b_0 = k$ から出発し, $\{a_n, b_n, c_n\}$ と $\operatorname{agm} = \operatorname{agm}(1, k)$ を求める.

$a'_0 = 1, b'_0 = k'$ から出発し, $\{a'_n, b'_n, c'_n\}$ と $\operatorname{agm}' = \operatorname{agm}(1, k')$ を求める.

$$\pi_{NN'} \equiv \frac{4a_{N+1}a'_{N'+1}}{1 - \sum_{j=1}^N 2^j c_j^2 - \sum_{j=1}^{N'} 2^j c'_j{}^2}$$

誤差評価 1

$$|\pi - \pi_{NN'}| < \frac{8\pi^2}{\operatorname{agm} \cdot \operatorname{agm}'} \left[2^N \exp\left(-\pi \frac{\operatorname{agm}}{\operatorname{agm}'} 2^{N+1}\right) + 2^{N'} \exp\left(-\pi \frac{\operatorname{agm}'}{\operatorname{agm}} 2^{N'+1}\right) \right] \quad (2.18)$$

誤差評価 2 さらに $\pi_{NN} = \pi_N$ と略記して

$$|\pi - \pi_N| < \frac{\pi^2 2^{N+4}}{\operatorname{agm}^2} \exp(-\pi 2^{N+1}) \quad (2.19)$$

上の評価は, 10 進小数で正しい桁数が

$$-\log_{10} |\pi - \pi_N| > \left(\frac{\pi}{\log 10} \right) 2^{N+1} - N \log_{10} 2 - 2 \log_{10} \left(\frac{\pi}{\operatorname{agm}} \right)$$

と見積もることができる (N を 1 増やせば, 正確さはほぼ倍) ことを意味する.

正多角形法など $O(c^{-an});$ この方法 $O(c^{-a^n})$